Devoir à rendre le Mercredi 07 Novembre

DEVOIR MAISON N°3

Exercice 1

On note $I = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et on pose $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ pour $x \neq -1$.

1) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2) Justifier que la restriction de f à I réalise une bijection de I sur I.
3) Déterminer le centre de symétrie de la courbe de f.

Exercice 2

On considère deux fonctions f et g définies sur le même intervalle I et à valeurs réelles. On suppose que f et g sont croissantes sur I. Prouver que $h = \max(f, g)$ est encore croissante sur I. On pourra illustrer la propriété avec deux fonctions f et g simples.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \tan(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2})$.

1) Déterminer le domaine de définition de f et préciser sa période.
2) Déterminer la période, les centres de symétrie et les asymptotes de $g(x) = \tan(x/2)$.
3) Justifier que $f(x) = g(\pi/2 - x)$. Par quelle transformation passe-t-on de $\mathcal{C}_f$ à $\mathcal{C}_g$?
   En déduire les centres de symétrie et les asymptotes de $\mathcal{C}_f$.
   Faire un dessin.
4) Prouver que $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} = \dfrac{1 - \sin(x)}{\cos(x)}$. Retrouver ainsi les centres de symétrie de f.
5) Déterminer les parties paires et impaires de f.

Exercice 4

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + \dfrac{9}{x^2+1}$ et $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y \mapsto y + \dfrac{9}{y+1}$ de sorte que $f(x) = g(x^2)$.

1) Etant donné un réel z, déterminer le nombre d'antécédents de z par g, en discutant selon l'intervalle où se trouve g. On traitera la question à la fois par les variations de de g et par la résolution de l'équation $g(y) = z$. Illustrer par un graphique.
2) En déduire le nombre d'antécédents d'un réel z par f, en discutant selon l'intervalle où se trouve z.

Exercice 5

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On note Γ sa courbe représentative et on suppose que Γ possède deux axes de symétrie d'équations $x = a$ et $x = b$ avec a et b distincts. Prouver que f est périodique. Illustrer avec cosinus ou sinus.

Exercice 6

1) On considère une fonction f de période 3/4 et une fonction g de période 2/7. Justifier que $h = f + g$ est périodique et donner la période de h.
2) Soit a un nombre rationnel. On pose $f(x) = \sin(x) + \sin(ax)$. Prouver que f est périodique.
3) On pose $g(x) = \sin(x) + \sin(\pi x)$. On rappelle que π est un nombre irrationnel.
   On suppose qu'il existe un réel T tel que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+T) + \sin(\pi(x+T)) = \sin x + \sin(\pi x).$$
   Prouver que $T = 0[2\pi]$ puis que $T = 0$. En déduire que g n'est pas périodique.